

SUR LA CONJECTURE DE ZAGIER POUR  $n = 4$ . II

NICUSOR DAN

ABSTRACT. We express a general multiple polylogarithm of weight  $n$  as an explicit linear combination of multiple polylogarithms of weight  $n$  in  $n - 2$  variables. We express a general multiple polylogarithm of weight 4 as an explicit linear combination of multiple polylogarithms of type  $(3, 1)$ . We deduce a 4 parameters functional equation expressing a certain linear combination of multiple polylogarithms of type  $(3, 1)$  as a linear combination of polylogarithms of weight 4.

RÉSUMÉ. On exprime un polylogarithme multiple de poids  $n$  général comme combinaison linéaire explicite de polylogarithmes multiples de poids  $n$  en  $n - 2$  variables. On exprime un polylogarithme multiple de poids 4 général comme combinaison linéaire explicite de polylogarithmes multiples de type  $(3, 1)$ . On déduit une équation fonctionnelle à 4 paramètres qui exprime une certaine combinaison linéaire des polylogarithmes multiples de type  $(3, 1)$  comme combinaison linéaire des polylogarithmes de poids 4.

## 1. INTRODUCTION

Soit  $n$  un entier positif. Si  $a$  et  $b$  sont deux points sur une variété complexe  $X$  et  $\omega_1, \dots, \omega_n$  sont des formes holomorphes de degré 1 sur  $X$ , l'intégrale itérée se définit par induction sur  $n$  par la formule

$$\int_a^b \omega_1 \circ \dots \circ \omega_n = \int_a^b \left( \int_a^t \omega_1 \circ \dots \circ \omega_{n-1} \right) \omega_n(t).$$

Les polylogarithmes multiples sont définis comme les intégrales itérées

$$H(a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}) = \int_{a_0}^{a_{n+1}} \frac{dt}{t - a_1} \circ \frac{dt}{t - a_2} \circ \dots \circ \frac{dt}{t - a_n}.$$

C'est une fonction complexe multivaluée sur l'ensemble des  $(n+2)$ -uples complexes  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  vérifiant  $a_0 \neq a_1, a_n \neq a_{n+1}$  (pour que l'intégrale converge). Elle est invariante par la transformée affine  $(a_i)_i \rightarrow (\alpha a_i + \beta)_i$ , pour des nombres complexes  $\alpha \neq 0$  et  $\beta$ .

Le polylogarithme classique de poids  $n$  est la fonction complexe multivaluée sur  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  qui s'écrit  $Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$  sur le disque unité  $|z| \leq 1$ . On peut prouver que  $Li_n(z) = -H(0|1, 0, \dots, 0|z)$ , donc le polylogarithme classique est le polylogarithme multiple réduit à une seule variable.

Soit  $E$  un corps. On va définir les polylogarithmes multiples "à valeurs on  $E$ ". On note  $E_{\times}^{n+2}$  l'ensemble des  $(n+2)$ -uples  $(a_0, \dots, a_{n+1})$  de  $E$  satisfaisant  $a_0 \neq a_1$  et  $a_n \neq a_{n+1}$ . On note  $E_{\times}^{n+2}/(E^{\times} \times E)$  le quotient de

---

Travail réalisé avec le support du CNCSIS-UEFISCU, par le contrat de recherche PN-II-ID-2228/2008.

$E_{\times}^{n+2}$  par les transformations affines  $(a_i)_i \rightarrow (\alpha a_i + \beta)_i$ . On note  $\mathcal{A}_n(E)$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  ayant comme base les symboles  $[a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}]$  pour  $(a_0, \dots, a_{n+1}) \in E_{\times}^{n+2}/(E^{\times} \times E)$ . On définit  $\mathcal{A}_0(E) = \mathbb{Q}$ . L'espace vectoriel gradué  $\mathcal{A}(E) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n(E)$  admet une structure de bialgèbre. La multiplication est donnée par la formule

$$(1) \quad [a_0|a_1, \dots, a_k|a_{k+l+1}] \cdot [a_0|a_{k+1}, \dots, a_{k+l}|a_{k+l+1}] = \sum_{\sigma} [a_0|a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k+l)}|a_{k+l+1}],$$

où  $\sigma$  parcourt les permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, k+l\}$  qui préservent l'ordre dans les sous-ensembles  $\{1, \dots, k\}$  et  $\{k+1, \dots, k+l\}$ . La comultiplication est donnée par une formule plus compliquée ([3]).

On considère la coalgèbre de Lie  $\mathcal{B}(E) = \mathcal{A}(E)/\mathcal{A}_{>0}(E) \cdot \mathcal{A}_{>0}(E)$  des éléments primitifs. On note  $\delta = \bigoplus_n \delta_n : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E)$  la codérivation. Suivant Zagier, on définit par induction l'espace vectoriel  $\mathcal{R}_n(E) \subset \mathcal{B}_n(E)$  des "relations entre polylogarithmes multiples on  $E$ " et on pose  $\mathcal{H}_n(E) := \mathcal{B}_n(E)/\mathcal{R}_n(E)$ . On note toujours  $[a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}]$  la classe de l'élément  $[a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}]$  modulo  $\mathcal{R}_n(E)$ . Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{R}_1(E)$  est par définition engendré par  $[a|z|b] + [b|z|c] = [a|z|c]$  pour  $z, a, b, c \in E$  vérifiant  $z \neq a, b, c$ . On calcule  $\mathcal{H}_1(E) = E^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . On note  $\mathcal{K}_n(E)$  le noyau de l'application  $(pr \otimes pr) \circ \delta_n : \mathcal{B}_n(E) \rightarrow (\mathcal{H}(E) \otimes \mathcal{H}(E))_n$ , où  $pr : \mathcal{B}_k(E) \rightarrow \mathcal{H}_k(E)$  a été déjà défini pour  $k < n$ . Soit  $t$  une variable. On définit  $\mathcal{R}_n(E)$  comme le sous-espace vectoriel engendré par  $\alpha(1) - \alpha(0)$  pour tous les éléments  $\alpha$  de  $\mathcal{K}_n(E(t))$  pour lesquels  $\alpha(1)$  et  $\alpha(0)$  sont bien définies. L'application  $(pr \otimes pr) \circ \delta_n$  se factorise à une application  $\delta_n : \mathcal{H}_n(E) \rightarrow (\mathcal{H}(E) \otimes \mathcal{H}(E))_n$  qui fait de  $\mathcal{H}$  une coalgèbre de Lie graduée.

La conjecture de Zagier ([4]) affirme que la valeur en  $s = n$  de la fonction zêta de Dedekind d'un corps de nombre est le déterminant d'une matrice dont les termes sont des polylogarithmes de poids  $n$  évalués dans des éléments du corps en question. Après des travaux de Goncharov et Zagier, la conjecture se réduit à une conjecture qui affirme que le régulateur de Beilinson est combinaison linéaire des polylogarithmes. On peut prouver que le régulateur de Beilinson est combinaison linéaire des polylogarithmes multiples. Il reste à trouver des formules exprimant les polylogarithmes multiples (en  $n$  variables) comme combinaisons linéaires de polylogarithmes (polylogarithmes multiples en 1 variable). L'article [1] donne une présentation synthétique de ces reductions. Dans le présent article on parcourt les premiers deux pas de la stratégie: passer de  $n$  variables à  $n - 2$  variables.

## 2. LE THÉORÈME POUR $n$ GÉNÉRAL

Soit  $n$  un entier positif. On introduit une généralisation légère de la notion de polylogarithme multiple. Soient  $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, x$  des éléments de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  vérifiant  $a_0 \neq a_1, a_0 \neq x, a_n \neq a_{n+1}, x \neq a_{n+1}$ . On choisit  $\omega(a_i, x)$  l'unique forme différentielle de degré 1 holomorphe sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{a_i, x\}$  qui est nulle si  $a_i = x$  et qui a un pôle d'ordre 1 de résidu  $+1$  en  $a_i$  et un pôle d'ordre 1 de résidu  $-1$  en  $x$  si  $a_i \neq x$ . On définit

$$H(a_0|a_1, \dots, a_n//x|a_{n+1}) = \int_{a_0}^{a_{n+1}} \omega(a_1, x) \circ \dots \circ \omega(a_n, x)$$

Est une fonction invariante pour l'action de  $PGL(2, \mathbb{C})$  sur  $((a_i)_i, x)$ . Le passage entre cette fonction et la fonction antérieure est clair:

$$(2) \quad H(a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}) = H(a_0|a_1, \dots, a_n/\infty|a_{n+1}),$$

$$H(a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}) = H((a_0-x)^{-1}|(a_1-x)^{-1}, \dots, (a_n-x)^{-1}|(a_{n+1}-x)^{-1})$$

si  $x \neq \infty$ . Soit  $y$  un autre élément de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . En écrivant  $\omega(a_i, x) = \omega(a_i, y) - \omega(x, y)$  pour tout  $0 \leq i \leq n$  et en développant de manière multilinéaire on peut écrire le polylogarithme multiple  $H(a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1})$  comme somme alternée des polylogarithmes multiples  $H(a_0|\dots/y|a_{n+1})$ . On va exploiter cette relation.

Soit  $E$  un corps. On transpose les considérations ci-dessus aux éléments de  $\mathcal{H}(E)$ . Soient  $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}, x$  des éléments distincts de  $\mathbb{P}^1(E)$ . En analogie avec (2), on définit l'élément  $[a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}]$  dans  $\mathcal{H}_n(E)$  comme étant  $[a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}]$  si  $x = \infty$  et  $[(a_0-x)^{-1}|(a_1-x)^{-1}, \dots, (a_n-x)^{-1}|(a_{n+1}-x)^{-1}]$  si  $x \neq \infty$ . Pour  $1 \leq i \leq n$  et pour  $I$  un sous-ensemble de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  contenant  $i$ , on définit  $A([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i, I)$  comme le symbole  $[a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}]$  dans lequel on remplace  $a_j$  par  $a_i$  dans toutes les positions  $j \in I$ . On définit

$$B([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i) = \sum_I (-1)^{|I|} A([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i, I),$$

la somme étant prise sur toutes les sous-ensembles  $I$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  contenant  $i$  et ayant le cardinal  $|I| \geq 2$ . Les considérations du paragraphe précédent appliquées à  $y = a_i$  suggèrent la relation dans  $\mathcal{H}_n(E)$ :

$$(3) \quad [a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}] + [a_0|a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n/a_i|a_{n+1}] \\ = B([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i)$$

C'est une relation dans  $\mathcal{H}_n(E)$  qu'on vérifie facilement par induction sur  $n$ .

On considère un entier  $0 \leq s \leq n$ . Par induction sur  $s$ , en utilisant des relations (1), on peut prouver facilement

$$[a_0|y, \dots, y, b_{s+1}, b_{s+2}, \dots, b_n/x|a_{n+1}] = (-1)^s \sum_J C_J,$$

où  $J$  parcourt les sous-ensembles de cardinal  $s$  de l'ensemble  $\{2, \dots, n\}$  et  $C_J$  désigne le symbole  $[a_0|b_{s+1}, \dots, b_n/x|a_{n+1}]$  dans lequel les positions  $J$  sont occupées par les  $y$  et les positions restantes par  $b_{s+2}, \dots, b_n$  dans cette ordre. On applique cela à  $A([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i, I)$ , à  $y = a_i$  et à  $s$  le plus petit entier pour lequel  $\{1, \dots, s\} \subset I$ . On obtient une présentation de  $A([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i, I)$  comme somme alternée explicite de  $[a_0|b_1, \dots, b_n/x|a_{n+1}]$  où les  $(b_j)_j$  sont parmi les  $(a_j)_j$ , il y a au moins deux  $a_i$  parmi les  $(b_j)_j$  et aucun d'entre eux sur la première position. Il est facile de prouver que, dans ces notations

$$[a_0|b_1, \dots, b_n/x|a_{n+1}] = [a_i|b_1, \dots, b_n/x|a_{n+1}] - [a_i|b_1, \dots, b_n/x|a_0].$$

On peut donc écrire  $A([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i, I)$  comme somme alternée explicite des polylogarithmes multiples en  $\leq n-2$  variables. On remplace dans (3) et on obtient

$$[a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}] + [a_0|a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n/a_i|a_{n+1}]$$

$$= D([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i),$$

où  $D([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i)$  est une somme alternée explicite des polylogarithmes multiples en  $\leq n-2$  variables.

Soient  $1 \leq i < j \leq n$  deux entiers. En appliquant trois fois la relation précédente pour les substitutions  $x \rightarrow a_i$ ,  $a_i \rightarrow a_j$ ,  $a_j \rightarrow x$ , on obtient

$$(4) \quad [a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}] + [a_0|a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n/x|a_{n+1}] \\ = D([a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}], i) - D([a_0|a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n/a_i|a_{n+1}], j) \\ + D([a_0|a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n/a_j|a_{n+1}], i).$$

On déduit que, pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$[a_0|a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}/x|a_{n+1}] - \text{sign}(\sigma)[a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}]$$

est une somme alternée explicite des polylogarithmes multiples en  $\leq n-2$  variables.

On suppose maintenant  $n \geq 3$ . La relation (1) pour  $k=2$ ,  $l=n-2$  dans  $\mathcal{H}_n(E)$  donne

$$(5) \quad \sum_{\sigma \in S} [a_0|a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}|a_{n+1}] = 0,$$

où  $S$  est l'ensemble des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  qui préservent l'ordre dans les sous-ensembles  $\{1, 2\}$  et  $\{3, \dots, n\}$ . Comme  $\sum_{\sigma \in S} \text{sign}(\sigma) = [n/2] \neq 0$ , où  $[x]$  dénote la partie entière du nombre réel  $x$ , on peut trouver une combinaison linéaire des relations (4) qui, additionnée à la relation (5), exprime  $[n/2][a_0|a_1, \dots, a_n/x|a_{n+1}]$  comme combinaison linéaire des polylogarithmes multiples en  $\leq n-2$  variables. On peut faire cela de manière explicite. On note, pour  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $A_{i,j} = [a_0|a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}|a_{n+1}]$  pour la permutation  $\sigma$  qui met 1 sur la position  $i$  et 2 sur la position  $j$ . On note  $R(i-1, j|i, j)$  la relation (4) pour  $A_{i-1,j} + A_{i,j}$  et de même pour  $R(i, j|j+1, j+1)$ . On doit considérer la somme de la relation (5) avec la combinaison linéaire  $\sum_{1 < i < j} c(i-1, j|i, j)R(i-1, j|i, j) + \sum_{1 < j < n} c(1, j|j+1, j+1)R(1, j|j+1, j+1)$ , où  $c(i-1, j|i, j) = -1$  si  $j-i$  est impair et 0 sinon et où  $c(1, j|j+1, j+1) = (-1)^j([n/2] - [j/2])$ . On déduit

**Théorème 1.** *Soit  $n \geq 3$  un entier. Soit  $E$  un corps. Soient  $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$  des éléments distincts de  $E$ . Alors  $[a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}]$  est combinaison linéaire explicite des polylogarithmes multiples de poids  $n$  en  $\leq n-2$  variables dans  $\mathcal{H}_n(E)$ .*

**Remarques:** 1) Francis Brown m'a communiqué d'avoir prouvé que  $[a_0|a_1, \dots, a_n|a_{n+1}]$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des polylogarithmes multiples de poids  $n$  en  $\leq n-2$  variables dans  $\mathcal{H}_n(E)$ . Il n'est pas clair si sa méthode peut être rendue explicite.

2) Si  $n$  est impair on peut obtenir une formule plus simple. On utilise la relation (1) pour  $k=1$ ,  $l=n-1$  pour obtenir une relation (5) pour  $S$  l'ensemble des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  qui préservent l'ordre dans le sous-ensemble  $\{2, \dots, n\}$ . On a  $\sum_{\sigma \in S} \text{sign}(\sigma) = 1$ . On note, pour  $1 < i < n$ ,  $R_i$  la relation (4) pour  $[a_0|a_2, \dots, a_i, a_1, a_{i+1}, \dots, a_n|a_{n+1}] + [a_0|a_2, \dots, a_{i+1}, a_1, a_{i+2}, \dots, a_n|a_{n+1}]$ . On doit considérer la relation (5)  $- R_2 - R_4 - \dots - R_{n-1}$ .

3. LE CAS  $n = 4$ 

Quand  $n = 4$ , les polylogarithmes multiples de poids 4 en 2 variables sont  $[x, y]_{3,1} = [0|x, 0, 0, y|1]$ ,  $[x, y]_{2,2} = [0|x, 0, y, 0|1]$ ,  $[x, y]_{1,3} = [0|x, y, 0, 0|1]$  et les polylogarithmes multiples de poids 4 en 1 variable sont les polylogarithmes  $[x]_4 = [0|x, 0, 0, 0|1]$ . Il existent des formules explicites exprimant les fonctions  $[x, y]_{2,2}$  et  $[x, y]_{1,3}$  comme combinaisons linéaires des fonctions  $[x, y]_{3,1}$  et polylogarithmes. Si on remplace ces formules dans le Théorème 1 on obtient:

**Théorème 2.** *Soit  $E$  un corps. Soient  $a, b, c, d, e, f$  des éléments distincts de  $E$ . On note pour simplifier  $[\cdot, \cdot] = [\cdot, \cdot]_{3,1}$ ,  $abc = \frac{a-c}{b-c}$ ,  $abcd = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$  et de même pour les autres combinaisons. Alors on a dans  $\mathcal{H}_4(E)$ :*

$$[a|b, c, d, e|f] = \phi(a, b, c, d, e) - \phi(f, b, c, d, e),$$

où

$$\begin{aligned} 2\phi(a, b, c, d, e) = & [aed, ced] - [ecd, acd] - 2[acd, ead] + 2[acd, bcd] - [bad, cad] - [cbd, abd] \\ & - [cab, eab] + [aeb, ceb] - [dab, cab] + [acb, dcb] - [dab, eab] + [aeb, deb] - [ace, dce] + [dae, cae] \\ & - [cbe, abe] - [bae, cae] + [bde, ade] + [abe, dba] - [dca, dca] - [dcbe, dcba] - [dcab, dca] \\ & + [dcb, dcba] + [cda, cdb] + [ecd, ecda] - [cea, ced] - [ecad, eca] + [ecab, eca] - [ecb, ecba] \\ & - [cea, ceb] + [ecda, ecdb] + [dbac, dbae] + [dbea, dba] - [dba, dbae] - [bde, bda] + [bdc, bda] \\ & - [dba, dbac] - [dbca, dbc] + [ebca, ebc] - [bec, bea] - [eba, ebac] + [ebdc, ebda] + [bea, bed] \\ & + \gamma(a, b, c, d, e), \end{aligned}$$

et  $\gamma(a, b, c, d, e)$  est une combinaison linéaire explicite des polylogarithmes  $[x]_4$ , où chaque  $x$  est fraction rationnelle en  $a, b, c, d, e$ .

**Remarques:** 1) Dans l'article [1], on a obtenu une autre présentation de  $[a|b, c, d, e|f]$  comme combinaison linéaire explicite de fonctions  $[x, y]_{3,1}$  et  $[z]_4$ . La comparaison des deux formules donne une équation fonctionnelle à 4 paramètres qui exprime une certaine combinaison linéaire des fonctions de type  $[x, y]_{3,1}$  comme combinaison linéaire des polylogarithmes  $[z]_4$ .

2) Dans l'article [1], on a montré comment la conjecture de Zagier pour  $n = 4$  se réduit à une conjecture de Goncharov ([2]), qui prédit qu'une certaine combinaison linéaire des fonctions de type  $[x, y]_{3,1}$  à 3 paramètres peut être écrite comme combinaison linéaire des polylogarithmes  $[z]_4$ . Il serait intéressant de comparer la combinaison linéaire des fonctions de type  $[x, y]_{3,1}$  de la remarque précédente avec celle de la conjecture de Goncharov. Si la deuxième peut être déduite de la première, on aurait prouvé la conjecture de Zagier pour  $n = 4$ .

3) Dans la formule de [1], on a écrit  $[a|b, c, d, e|f] = F(a, b, c, d, e) - F(f, b, c, d, e)$ . En plus, la fonction  $F(a, b, c, d, e)$  est invariante à la permutation cyclique  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a$ . Il n'est pas clair si  $F(a, b, c, d, e)$  est égal à  $\phi(a, b, c, d, e)$ . Si cela est vrai, l'équation fonctionnelle de la remarque 1) est somme de deux équations fonctionnelles à 3 paramètres.

**Bibliographie:**

[1]: N. Dan: Sur la conjecture de Zagier pour  $n = 4$ , arXiv:0809.3984 [math.KT] (2008)

[2]: A. B. Goncharov: Polylogarithms and motivic Galois group, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Part 2, AMS, Providence, RI (1994), p. 43-96

[3]: A. B. Goncharov: Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, arXiv:math/0103059 [math.AG] (2001)

[4]: D. Zagier: Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields, Progr. Math, vol. 89(1991), p. 391-430

INSTITUTUL DE MATEMATICA AL ACADEMIEI ROMANE, CALEA GRIVITEI 21, BUCURESTI 010702, ROMANIA

*E-mail address:* `ndan@dnt.ro`